

The Final of Calculus 0625 (題目卷)

1. (10%) 求下列數列極限

(a) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ (b) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

2. (15%) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$, \dots , $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \geq 1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是否存在? 若存在, 極限值為何?

3. (20%) 判斷下列級數是否收斂(請詳述過程)

(a) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.001}}$

4. (20%) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $-1 < x < 1$, 求 $f'(x)$ 和 $\int f(x)dx$ 的冪級數並

求各別的收斂區間

5. (15%) 求 $\tan^{-1} x^2$ 的冪級數, 並求其收斂區間

6. (20%) 給定參數方程 $x(\theta) = \sin \theta + \theta$, $y(\theta) = \cos \theta + 1$, 求下列各小題

(1) 求函數下方面積, $\pi \leq \theta \leq 3\pi$

(2) 求弧長, $\pi \leq \theta \leq 3\pi$

7. (10%) 求向量函數 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ 在 $(1, 1, 1)$ 的切線方程式

8. (10%) 向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 可微且長度 $|\mathbf{r}(t)|$, 對任意 t 恆為常數 c ,

證明 $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$ 恆成立 (Hint: 隱函數微分)

Good luck