

## The Midterm II of Calculus 0604

( 題目卷 )

1. (20 %) 求下列極限

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} e^{-x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \ln(e^{4t} - 1) dt}{x^2} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

2. (20 %) 求下列積分

$$(a) \int x^2 \ln x dx \quad (b) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

3. (10%) 求兩函數  $y = \sqrt{x}$  和  $y = x^2$  所圍之封閉區域繞  $x$  軸之旋轉體  
體積

4. (10%) 求函數  $y = x^3$  在  $[0,1]$  區間繞  $x$  軸旋轉之旋轉體表面積

5. (20%) 判斷下列級數是否收斂(請詳述過程)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

背面尚有題目

6. (20%) 求冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$  之收斂區間

7. (20%) 是非題

(1) 若冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=2$  收斂，則在  $x=-1$  必收斂

(2) 若  $a_n, b_n > 0$  對任意  $n \in N$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  發散，則  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$  發散

公式表：

$$1. \int u dv = uv - \int v du \quad 2. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$3. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$4. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$5. \text{旋轉體體積圓盤法(對 } x \text{ 軸旋轉)} : \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$6. \text{旋轉體體積剝殼法(對 } y \text{ 軸旋轉)} : \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

$$7. \text{弧長} : \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$8. \text{旋轉體表面積(對 } x \text{ 軸旋轉)} : \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$9. \text{(微積分基本定理) 若 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 區間連續且 } F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ 則 } F'(x) = f(x)$$

**GOOD LUCK**