共計10大題，每題10分，共100分；另有加分題2題，可通用於三次學期考加分項.

1. (10%) (5%) (a) 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(5%) (b) 求 $\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!4}+\cdots+\frac{1}{n!(n+2)}$

2. (10%) 求斂散性

(3%) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}$

(3%) (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(4%) (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$

3 (10%) 判斷下列交錯數列發散、絕對收斂或條件收斂

(3%) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{\sqrt{k}}$

(3%) (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{e^n}$

(4%) (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{e^n}$

4. (10%) 求收斂區間

(3%) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k}$

(3%) (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (並求收斂半徑)

(2%) (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$

(2%) (d) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

5. (10%) (3%) (a) 若 $h(x)=\cos x^3$, 求 $h^{(12)}(0)$!

(3%) (b) 求 $f(x)=\ln x$ 展開為 $(x-1)$ 的泰勒級數

(4%) (c) 求 $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ 到三位小數準確度

(即誤差小於 0.001)

6. (10%) (3%) (a) $f(x,y,z)=x\sin(yz)$, 求 $f_z(a,1,\pi)$

(3%) (b) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(4%) (c) $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 試證 $xf_x+yf_y+zf_z=0$

7. (10%) (3%) (a) $T=xe^y$, $x=s^2$, $y=s-t^3$, 求 $\frac{\partial T}{\partial s}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$

(3%) (b) 試證 $u=f(v)$, $v=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

滿足偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2$$

(4%) (c) $z=f(x,y)$, $z\in C^2$, 若 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$

試證 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}$

8. (10%) (4%) (a)

$$x^2+xy+y^2+ux+u^2=3$$

求 $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dy}$

(3%) (b) 求 $f(x,y)=x^2\ln y+y^2e^x$ 之全微分

(3%) (c) 若 $\sin zy=\cos xz$, 求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\pi)}$.

9. (10%) (4%) (a) 求 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 之極值
(鞍點, 相對/絕對極小值等)

(3%) (b) 求點 $(-1,2,1)$ 至球 $x^2+y^2+z^2=1$ 之最短及最長距離

(3%) (c) 求 $x^2+y^2\le 1$ 之條件下, $f(x,y)=4x+3y$ 之極大值及極小值

10. (10%) (4%) (a) 對 $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$ 在點 $(1,2,-1)$ 處沿 $i+j+k$ 方向之方向導數, 又最大方向導數為何?

(3%) (b) $a=3i+4j+5k$, $b=-4i+3j-5k$
求 a 與 b 之夾角

(3%) (c) 求 $f(x,y,z)=x^3+y^2+xyz$ 在點 $(1,1,1)$ 處沿向量 $[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ 方向之方向導數

102年微積分II第三次學期考加分題

(2013.6.19)

4. (20%) (3%) (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x \cdot \sin x}$

(hint: Maclaurin series)

(3%) (b) 求 $\sum_{k=1}^{20} k \cdot \dfrac{20!}{k!(20-k)!}$

(hint: 二項係數)

(4%) (c) 若 $\dfrac{x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + \dfrac{B_2 x^2}{2!} + \dfrac{B_3 x^3}{3!} + \cdots$

求 B_1 B_2 B_3

(3%) (d) 用馬克勞林級數估計 $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$

準確度到小數點第3位

(3%) (e) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

(3%) (f) $2xy + 3yz + zx = 12$, x, y, z 均為正實數:

求 $f(x, y, z) = xyz$ 之極大值

(3%) (g) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上各點中與點 $(1, 2, 2)$ 之距離最短之點的坐標?

並求此距離?